$V(P)$ ... vekt. prostor

BÁZE vekt. prostoru je libovolná n-tice jeho lineárně nezávislých generátorů.

Příklad 1) $\mathbb{R}(\mathbb{R})$ $(1, 2)$

$x \cdot 1 = 0 \Rightarrow x = 0$

$x \cdot 1 + y \cdot 2 = 0 \not\Rightarrow x = y = 0$

2) $\mathbb{R}^3$ $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$

$(2,1,0),(3,2,1),(0,0,2)$

Tvrzení $e_1, \dots, e_n$ ... báze $V(P)$

Pak $\forall v \in V \ \exists!$ n-tice skalárů $x_1, \dots, x_n \in P$ tak, že $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

Důkaz $e_1, \dots, e_n$ generují $V \Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in P$ tak, že $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

Předp., že $\exists y_1, \dots, y_n \in P : v = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$.

$0 = v - v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n - (y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) =$

$= (x_1 - y_1) e_1 + \dots + (x_n - y_n) e_n$

$\Rightarrow x_1 - y_1 = \dots = x_n - y_n = 0$

$x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$.

Koeficienty $x_1, \dots, x_n$ z předchozího tvrzení se nazývají SLOŽKY (SOUŘADNICE) vektoru v vzhledem k bázi $e_1, \dots, e_n$.

Příklad $\mathbb{R}^3$ $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$

$v = (a,b,c)$ má vzhledem k bázi e_1, e_2, e_3 složky a, b, c.

$f_1 = (1,0,0), f_2 = (1,1,0), f_3 = (1,1,1)$

$v = (a,b,c)$

$x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 = (a,b,c)$

$x_1(1,0,0) + x_2(1,1,0) + x_3(1,1,1) = (a,b,c)$

$(x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_3) = (a,b,c)$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ x_2 + x_3 &= b \\ x_3 &= c \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a-b \\ 0 & 1 & 0 & b-c \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right) \quad x_1 = a-b, x_2 = b-c, x_3 = c$$

MATICE PŘECHODU

$V(P)$

$e_1, \dots, e_n$ ... báze $V(P)$ (stará)

$f_1, \dots, f_n$ ... báze (nová)

Matice Q, jejíž sloupce tvoří souřadnice nových bázových vektorů vzhledem ke staré bázi, se nazývá MATICE PŘECHODU od báze $e_1, \dots, e_n$ k bázi $f_1, \dots, f_n$.

$v \in V$

$x_1, \dots, x_n$ jsou souřadnice v vzhledem k $e_1, \dots, e_n$

$y_1, \dots, y_n$ jsou souřadnice v vzhledem k $f_1, \dots, f_n$.

Potom
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

ELEMENTÁRNÍ ÚPRAVA n-tice vektorů $u_1, \dots, u_n \in V$ je:

1) vynásobení i-tého vektoru nenulovým skalárem
2) přičtení c-násobku j-tého vektoru k i-tému
3) výměna dvou vektorů.

Řekneme, že dvě n-tice vektorů jsou EKVIVALENTNÍ, jestliže jednu získáme z druhé konečnou posloupností elementárních úprav.

Tvrzení: Nechť je n-tice $u_1, \dots, u_n \in V$ ekvivalentní s n-ticí $v_1, \dots, v_n \in V$. Pak n-tice $u_1, \dots, u_n$ generuje V právě tehdy, když n-tice $v_1, \dots, v_n$ generuje V.

Důkaz: Předp., že $v_i = u_i + c u_j$, $k \neq i \Rightarrow v_k = u_k$.

$v \in V \quad \exists\, x_1, \dots, x_n \in P$ tak, že

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

Pak
$$\begin{aligned} v &= x_1 u_1 + \dots + x_{i-1} u_{i-1} + x_i (u_i + c u_j) + \\ &\quad + x_{i+1} u_{i+1} + \dots + x_n u_n = \\ &= x_1 u_1 + \dots + x_{i-1} u_{i-1} + x_i u_i + c x_i u_j + x_{i+1} u_{i+1} + \\ &\quad + \dots + x_j u_j + \dots + x_n u_n = \\ &= x_1 u_1 + \dots + x_i u_i + \dots + (c x_i + x_j) u_j + \\ &\quad \dots + x_n u_n . \end{aligned}$$

Tvrzení $u_1, \dots, u_n$, $v_1, \dots, v_n$ ekvivalentní
vektory $u_1, \dots, u_n$ jsou lin. nezávislé $\iff$
jsou vektory $v_1, \dots, v_n$ lin. nezávislé.

Důkaz Opět jen pro jednu úpravu, přičtení c-násobku j-tého vekt. k i-tému.
$v_i = u_i + c u_j$.

Předp., že $u_1, \dots, u_n$ jsou lin. nezávislé.
$x_1 u_1 + \dots + x_n u_n = 0 \Rightarrow x_1 = \dots = x_n = 0$.

$0 = x_1 v_1 + \dots + x_i v_i + \dots + x_n v_n = x_1 u_1 + \dots + x_i (u_i + c u_j) + \dots$
$\dots + x_n u_n = x_1 u_1 + \dots + x_i u_i + \dots + (c x_i + x_j) u_j +$
$+ \dots + x_n u_n$

$\Rightarrow x_1 = \dots = x_i = \dots = x_{j-1} = c x_i + x_j = x_{j+1} = \dots$
$\dots = x_n = 0$

$c x_i + x_j = 0 \Rightarrow x_j = 0$

$\Rightarrow v_1, \dots, v_n$ jsou lin. nezávislé.

Tvrzení Nechť vektory $v_1, \dots, v_n$ generují vekt. pr. V, nechť $u_1, \dots, u_m \in V$ jsou lin. nezávislé. Pak $n \geq m$.

Důkaz $v_1, \dots, v_n$ generují $V \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists x_{ij} \in P$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

$u_i = x_{i1} v_1 + \dots + x_{in} v_n$.

Matice $\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$ upravit na schodovitý tvar

Když $m > n$, pak je aspoň 1 řádek nulový
$\Rightarrow$ spor s lin. nezávislostí.

Důsledek Jsou-li $u_1, \dots, u_n$ a $v_1, \dots, v_m$ báze vektorového prostoru V, pak $n = m$.